

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3
§2. TÍCH PHÂN

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

III. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp tính tích phân từng phần:

➤ **VD MỞ ĐẦU:**

Công thức $\int u dv = uv - \int v du$. Tính $\int_a^b u dv = ?$

Lời giải: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

➤ **Định lý:** Nếu $u = u(x)$, $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \quad \text{hay} \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

➤ **Phương pháp:**

Bước 1: Chọn đặt u và dv thích hợp.

Bước 2: Tìm du và v .

Bước 3: Sử dụng công thức tích phân từng phần.

Bước 4: Tính tích phân $\int_a^b u dv$ đơn giản hơn.

➤ **Chú ý: Dấu hiệu sử dụng tích phân**

Cách đặt	Dạng tích phân			
	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\sin x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\sin x dx$	$\cos x dx$	$P(x) dx$

2. Ví dụ:

➤ **VD1:** Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

➤ **VD2:** Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x + 3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = (2x + 3)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 3e - 1.$$

➤ **VD3:** Tính tích phân $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 2 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = 3 \end{cases}.$$

$$I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx = \int_2^3 \ln t \frac{dt}{2} \Leftrightarrow 2I = \int_2^3 \ln t dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}.$$

$$2I = \int_2^3 \ln t dt = t \ln t \Big|_2^3 - \int_2^3 dt = t \ln t \Big|_2^3 - t \Big|_2^3 = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1}{2}.$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [Mức độ 1] Tính tích phân $I = \int_0^1 (x + 1) e^{2x} dx$.

A. $I = e^2$.

B. $I = \frac{3e^2 - 1}{4}$.

C. $I = \frac{3e^2 - 3}{4}$.

D. $I = 5e^2 - 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 (x + 1) e^{2x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + 1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{2x} (x + 1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = e^2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{3e^2 - 1}{4}.$$

Câu 2. [Mức độ 2] Kết quả tích phân $I = \int_0^1 (2x + 3) e^x dx$ được viết dưới dạng $I = ae + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

A. $ab = 3$.

B. $a^3 + b^3 = 28$.

C. $a - b = 2$.

D. $a + 2b = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = e^x (2x+3) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1.$$

Vậy $a = 3, b = -1$ nên $a + 2b = 1$.

Câu 3. [Mức độ 3] Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx = \frac{a}{b} + \frac{c\pi^2}{d}$ với $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c + d$.

A. 12.

B. 14.

C. 36.

D. 38.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{32} = \frac{a}{b} + \frac{c\pi^2}{d} \Rightarrow a = 1; b = 4; c = 1; d = 32.$$

Vậy $a + b + c + d = 38$.

Câu 4. [Mức độ 2] Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = 11$.

B. $T = 9$.

C. $T = 10$.

D. $T = 8$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \ln(x^2 + 9) d(x^2) = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln(x^2 + 9) \right]_0^4 - \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 d[\ln(x^2 + 9)].$$

$$= 8 \ln 25 - \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 \frac{2x}{x^2 + 9} dx = 16 \ln 5 - \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{x^2 + 9 - 9}{x^2 + 9} d(x^2 + 9).$$

$$= 16 \ln 5 - \frac{1}{2} (x^2 + 9 - 9 \ln |x^2 + 9|) \Big|_0^4 = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8.$$

Suy ra $T = a + b + c = 25 - 9 - 8 = 8$.

Câu 5. [Mức độ 3] Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 x f(5x) dx = 1$. Khi đó giá trị của $\int_0^5 x^2 f'(x) dx$ bằng

A. 15.

B. 23.

C. -25.

D. $\frac{123}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 5x \Rightarrow dt = 5dx$.

Khi đó $\int_0^1 x f(5x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 \frac{t}{5} f(t) \frac{dt}{5} = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 x f(x) dx = 25$.

Chọn $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x) dx = x^2 f(x) \Big|_0^5 - 2 \int_0^5 x f(x) dx = 25 f(5) - 2 \cdot 25 = -25$.

Câu 6. [Mức độ 3] Biết $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} e^2$ với $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c + d$.

A. 12.

B. 14.

C. 16.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx$.

Xét $\int_1^e x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó $\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

Xét $\int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx$.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $\int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Do đó $I = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} e^2$.

Suy ra $a = 3$; $b = 4$; $c = 1$; $d = 4$.

Vậy $a + b + c + d = 12$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. [Mức độ 1] Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx$ ta được kết quả:

A. $\frac{\pi}{8}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Câu 2. [Mức độ 1] Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$.

B. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$.

C. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$.

D. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx.$$

Câu 3. [Mức độ 2] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\int_0^1 x f(4x) \, dx = 1$.

Tính tích phân $\int_0^4 x^2 f'(x) \, dx$.

A. 16.

B. -16.

C. 8.

D. -8.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } 4x = t \Rightarrow 4dx = dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 4. \text{ Suy ra } \int_0^1 x f(4x) \, dx = \int_0^4 \frac{t f(t)}{16} \, dt = 1 \Rightarrow \int_0^4 x f(x) \, dx = 16.$$

$$\text{Xét } \int_0^4 x^2 f'(x) \, dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

Khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x) dx = x^2 f(x) \Big|_0^4 - \int_0^4 2x f(x) dx = 16 - 2.16 = -16$.

Câu 4. [Mức độ 2] Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính giá trị ab .

A. $ab = 32$.

B. $ab = 2$.

C. $ab = 4$.

D. $ab = 12$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1+x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = (1+x) \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

$$= (1+x) \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}.$$

$$\Rightarrow a = 4; b = 8 \Rightarrow ab = 32.$$

Câu 5. [Mức độ 3] Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos \sqrt{x} dx$.

A. $I = \pi - 2$.

B. $I = \pi + 2$.

C. $I = -\pi - 2$.

D. $I = -\pi + 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2t dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt \Leftrightarrow \frac{I}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \sin t \end{cases}.$$

$$\frac{I}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\text{Vậy } I = \pi - 2.$$